

# The Mathematics of Marriage

## Dynamic Nonlinear Models

John M. Gottman, James D. Murrey, Catherine C. Swanson, Rebecca Tyson  
and Kristin R. Swanson

London, 2002

### Введение

Книга посвящена супружеским взаимоотношениям, в том числе:

- 1) Моделирование взаимоотношений на математической основе
- 2) Качественное понимание брака
- 3) Предсказание развода

Основной вопрос они формулируют словами Термана: «Какие силы делают некоторые браки счастливыми, а другие несчастливыми».

Автор говорит об основных свойствах, устойчиво характеризующих «несчастные» браки, которые являются основными претендентами на роль предикторов разводов:

- 1) Преобладание негативных эмоций над позитивными
- 2) Эскалация негативных эмоций (ответом на отрицательные эмоции является еще более сильный негатив)
- 3) Паттерн «Требование-Избегание» («Demand-Withdraw» pattern) – когда один из супругов (чаще всего жена) пытается привлечь внимание другого к обсуждению семейных вопросов, а другой избегает этого.
- 4) Четыре «Всадника апокалипсиса»: критика, презрение, защита, блокирование (criticism, contempt, defensiveness, stonewalling). Авторы полагают, что эти негативные эмоции разрушают отношения сильнее, чем любые другие (или являются следствием распада отношений).

### Брачная типология

1. Устойчивые пары
  - Validators

- Volatiles
- Avoiders

## 2. Неустойчивые пары

- Hostile
- Hostile-detached

### Величины, используемые для моделирования

Для построения модели взаимоотношений авторы используют положительные и негативные реакции. Авторы анализируют поведение супругов, и весь спектр реакций проектируют на одномерную шкалу, на основе которой предсказывают будущее брака. Каждой реакции на шкале ставится соответствующий вес в зависимости от силы и типа реакции.

### Две дополнительные загадки.

Авторы обращают внимание на два широко распространенных в терапевтической практике феномена:

- 1) Отсрочка обращения за помощью «до последнего»
- 2) Высокая вероятность рецидива

### Уравнение брака.

Будем искать уравнение, описывающее поведение супругов в процессе разговора в виде:

$$W_{t+1} = I_{HW}(H_t) + P_t^W$$

$$H_{t+1} = I_{WH}(W_{t+1}) + P_t^H$$

Здесь  $I_{HW}(H_t)$  и  $I_{WH}(W_{t+1})$  - функции, характеризующие влияние соответственно мужа на жену и жены на мужа.

$P_t^W, P_t^H$  - функции, описывающие независимое поведения (не подверженное влиянию).

Считаем без ограничения общности, что жена говорит первой (что обычно и наблюдалось).

### Независимое поведение

Независимое поведение описывает простым уравнением

$$P_{t+1} = r_i P_t + a$$

Коэффициент  $a$  – индивидуальная константа.  $r_i$  – инерция (показатель изменчивости аффективного поведения).

Уравнение решается в общем виде:

$$P_t = r_i^t P_0 + \frac{a(1 - r_i^t)}{1 - r_i}$$

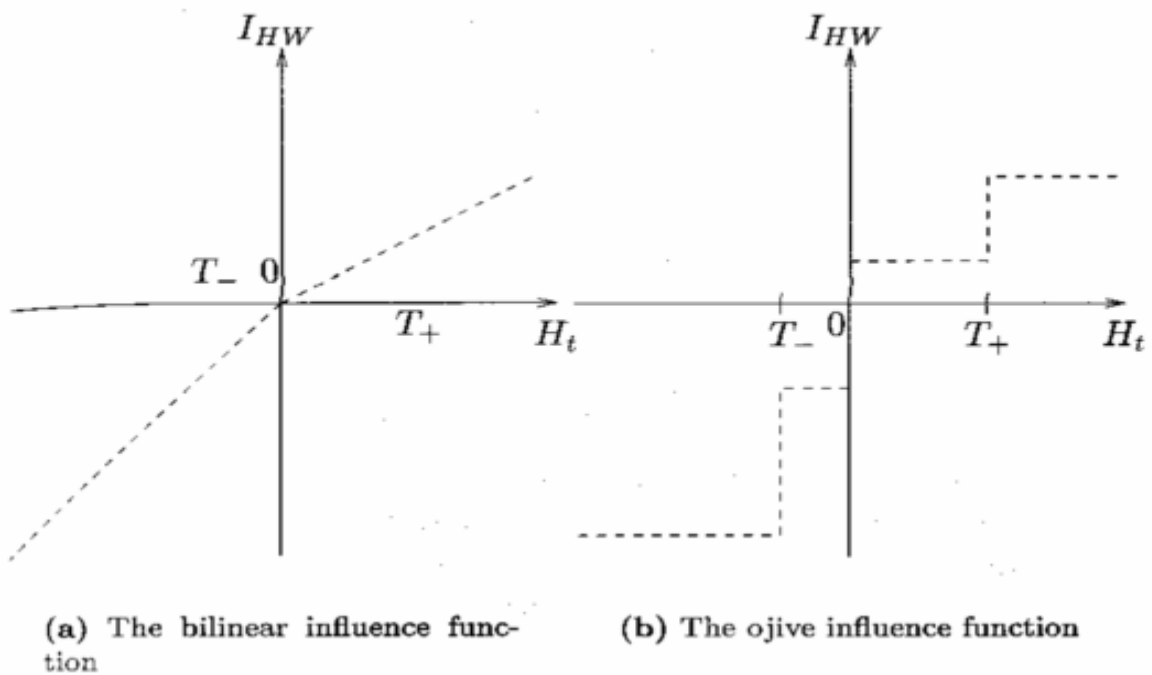
Имеется особая точка, получаемая приравнением производной к нулю:

$$P = \frac{a}{1 - r_i}$$

При  $|r_i| < 1$  имеем устойчивое независимое состояние.

### Зависимое поведение

Зависимое поведение описывается графически в двух вариантах, отражающих различные стороны процесса взаимоотношений – либо через bilinear influence function, либо через ojive influence function, график которых представлен ниже. На оси X откладываются ранжированные эмоциональные состояния мужа, а по оси Y – влияние мужа на жену.

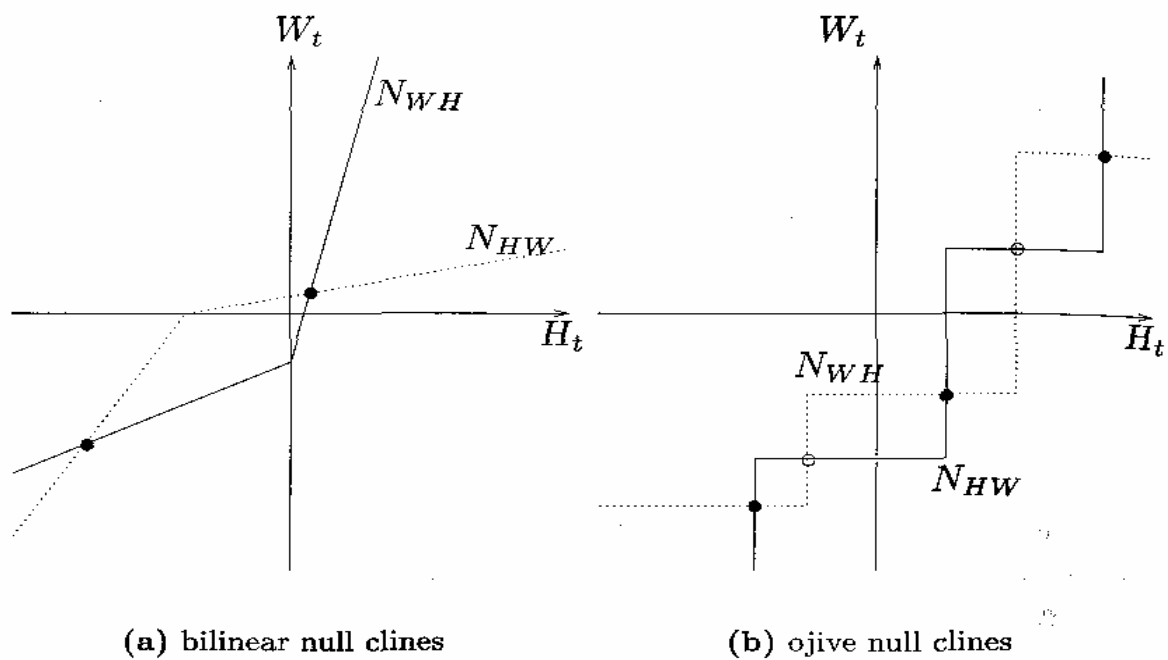


В итоге получаем уравнение брака:

$$W_{t+1} = I_{HW}(H_t) + r_1 W_t + a$$

$$H_{t+1} = I_{WH}(W_{t+1}) + r_2 H_t + b$$

Нарисуем на фазовой плоскости главные изоклины и выделим особые точки. Устойчивость этих точек определяется аналитически.



Устойчивые состояния на графике обозначены закрашенными точками, неустойчивые не закрашены. Видим, на рисунке а) имеется две особые точки, и обе устойчивы, на рисунке б) пять особых точки, три устойчивые и две неустойчивые. Каждая точка характеризуется своей областью притяжения: если движение начинается из точки, находящейся в области притяжения особой точки, то оно сходится к этой точке. Каждая точка характеризуется скоростью сходимости к ней.

### Исследование

Основная часть исследования проводилась в период с 1988 до 1992 года в Сиэтле и состояла из двух этапов.

На первом этапе происходил набор испытуемых, подходящих под условия эксперимента. Это должны были быть пары, для которых это был первый брак, женатые не более 6 месяцев, без детей. Супругам высылался по отдельности Marital Adjustment Test (MAT). Всего 179 пар.

На втором этапе 130 пар, в которых оба супруга ответили на вопросы теста, были приглашены в лабораторию для проведения эксперимента и заполнения дополнительных опросников. Испытуемые подходили под основные демографические и расовые показатели Сиэтла:

Wife age 25.4 (SD=3.5)

Husband age 26.5 (SD=4.2)

Wife marital satisfactory 120.4 (SD=19.7)

Husband marital satisfactory 115.9 (SD=18.4)

Пары были распределены в три группы по примерно 40 человек, одна группа за год.

Исследование проводилось в течение 6 лет. Таким образом, пары наблюдались от 4 до 6 лет.

## Процедура

Пары приглашались в лабораторию, где в течение 15 минут обсуждали наиболее острые жизненные и семейные вопросы. Разговор снимался на 2 видеокамеры, установленных напротив каждого супруга и записывался на микрофон. Также снимались основные физиологические показатели (частота сердцебиения и проч.)

Затем полученные данные анализировались и кодировались при помощи SPAFF (Gottman, 1996). SPAFF фокусировался на эмоциональных проявлениях, определяемых по лицевым выражениям (основанных на Facial Action Coding SYSTEM, системе кодирования эмоций по выражениям на лице, разработанной Ekman и Friesen, 1978).

15 минут разговора разбивались на интервалы по 6 секунд, где каждой секунде соответствовал балл по шкале от -4 до 4 (-4 – наиболее негативные эмоции, как например презрение, 4 – наиболее позитивные). Затем эти величины суммировались за шестисекундный интервал. В итоге получается шкала от -24 до 24.

Первоначально в своих исследованиях авторы были нацелены на предсказание развода, поэтому вначале шкала была от -24 до 12 – соответственно основные предикторы развода (отвращение и проч.) имели больший вес.

Позже авторы были нацелены не только на предсказание развода, но и на способы, с помощью которых браки можно было разделить на 3 основные группы, соответственно:

- 1) Счастливые устойчивые браки
- 2) Несчастливые устойчивые браки
- 3) Неустойчивые браки, те, которые должны окончиться разводом

Отсюда в более поздних исследованиях авторы концентрировались на более «лояльной» системе кодирования шкалы (от -24 до 24).

## Основные результаты

Ниже приведены результаты для *o*jive influenced function (соответственно, для ранней и более поздней модели). На основе результатов делается вывод, что *uninfluenced steady state* является хорошей характеристикой, позволяющей отличить три группы браков одна от другой а также предсказать развод. Особое внимание авторы обращают на показатель *negative threshold* (негативный порог в *o*jive form). Этот показатель значимый для разделения несчастливых устойчивых браков от неустойчивых, которые оканчиваются разводом. Именно в этой переменной авторы находят ответ на две загадки, сформулированные выше (позднее обращение за помощью и рецидив). Чем больше *negative threshold*, тем дольше супруги стараются не замечать проблемы в отношениях, а семейная терапия, по мнению автора, как раз направлена на увеличение этого порога, на терпимость друг к другу, на адаптирование к более высокому негативному порогу, а не на исправление отношений. Поэтому система супружеских отношений возвращается в свое устойчивое прежнее состояние. Таким образом, обе загадки суть две стороны одной медали, а именно – адаптирование к более высокому уровню негативности.

**Table 12.1:** Divorce Prediction with the Initial SPAFF Weights.

Variable	F-ratio	df	Means	
			Stable	Unstable
Wife uninfluenced steady state	21.37***	1,123	.55	-2.58
<i>Wife influence function</i>				
Positive threshold	.42	1,123	4.04	3.65
Negative threshold	.20	1,123	-5.57	-6.00
Wife influenced steady state	.72	1,112	-1.37	-2.14
Husband inertia	4.18a	1,123	.44	.32
Husband uninfluenced steady state	15.96***	1,123	-.34	-2.16
<i>Husband influence function</i>				
Positive threshold	2.27	1,123	4.28	3.53
Negative threshold	3.69a	1,123	-5.13	-6.71
Husband influenced steady state	7.99**	1,112	-.59	-2.84

a  $p < 0.10$ ; \*  $p < 0.05$ ; \*\*  $p < 0.01$ ; \*\*\*  $p < 0.001$ .

**Table 12.2:** Three Criterion Groups with the Initial SPAFF Weights.

Variable	F-ratio	df	Means		
			Happy, Stable	Unhappy, Stable	Divorced
Wife uninfluenced steady state	11.82***	2,48	.09	-.61	-2.58
<i>Wife influence function</i>					
Positive threshold	.83	2,48	4.71	4.11	3.65
Negative threshold	.23	2,48	-5.06	-5.47	-6.00
Wife influenced steady state	1.07	2,46	-.64	-1.48	-2.14
Husband uninfluenced steady state	5.85***	2,48	-.09	-.93	-2.16
<i>Husb influence function</i>					
Positive threshold	.85	2,48	4.12	4.29	3.53
Negative threshold	1.02	2,48	-5.00	-5.65	-6.71
Husband influenced steady state	6.02	2,46	-.71	.29	-2.84

\*\*\*  $p < 0.001$ .

**Table 12.3:** Divorce Prediction with the Final SPAFF Weights.

Variable	F-ratio	df	Means	
			Stable	Unstable
Wife uninfluenced steady state	14.86***	1,123	.51	-2.26
<i>Wife influence functions</i>				
Positive threshold	.71	1,123	8.25	7.24
Negative threshold	.03	1,123	-6.23	-6.06
Wife influenced steady state	1.29	1,106	-.65	-1.95
Husband inertia	3.07a	1,123	.40	.30
Husband uninfluenced steady state	18.40***	1,123	.72	-1.89
<i>Husband influence function</i>				
Positive threshold	2.49	1,123	8.45	6.65
Negative threshold	8.25**	1,123	-5.36	-7.71
Husband influenced steady state	4.36*	1,106	.71	-1.49

a  $p < 0.10$ ; \*  $p < 0.05$ ; \*\*  $p < 0.01$ ; \*\*\*  $p < 0.001$ .

**Table 12.4:** Three Criterion Groups with the Final SPAFF Weights.

Variable	F-ratio	df	Means		
			Happy, Stable	Unhappy, Stable	Divorced
Wife uninfluenced steady state	12.61***	2,48	1.07	-.03	-2.26
<i>Wife influence function</i>					
Positive threshold	.73	2,48	9.12	8.53	7.24
Negative threshold	.28	2,48	-5.76	-6.76	-6.06
Wife influenced steady state	1.60	2,41	-.05	-1.88	-1.95
Husband uninfluenced steady state	9.10***	2,48	1.06	-.41	-1.89
<i>Husb influence function</i>					
Positive threshold	.54	2,48	7.94	7.94	6.65
Negative threshold	2.22	2,48	-5.94	-5.29	-7.71
Husband influenced steady state	1.15	2,41	-.33	.31	-1.49

\*\*\*  $p < 0.001$ .

### Marriage model with Repair and Damping

Данная модель призвана уточнить возможности модели и внести в нее следующие феномены:

- 1) Repair – вариант поведения, при котором на негатив супруг реагирует позитивно, чтобы «сгладить» эмоциональную ситуацию. Это происходит в том случае, когда у одного супруга эмоциональное состояние превысило некоторый негативный порог. Авторы считают этот вариант поведения очень полезным для отношений. Они ссылаются, что в том случае, когда отношения неблагополучно, это может их спасти, правда, это не делает их благополучными
- 2) Damping – вариант поведения, прямо противоположный Repair.

Уравнение с учетом этих двух феноменов должно быть переписано в виде:

$$W_{t+1} = I_{HW}(H_t) + r_1 W_t + a + R_W(H_t) + D_H(H_t)$$

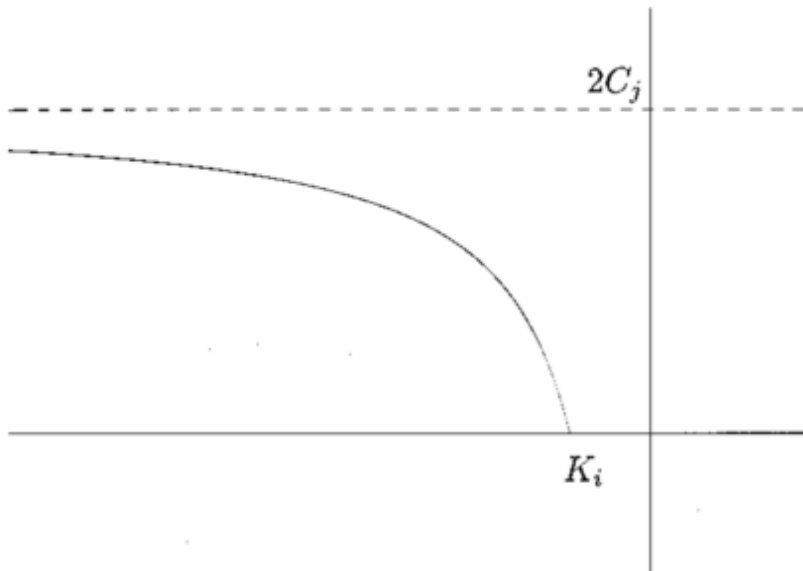
$$H_{t+1} = I_{WH}(W_{t+1}) + r_2 H_t + b + R_H(W_t) + D_W(W_t)$$

$$Repair_j(x) = C_j \frac{|x - K_i| - (x - K_i)}{1 - (x - K_i)}$$

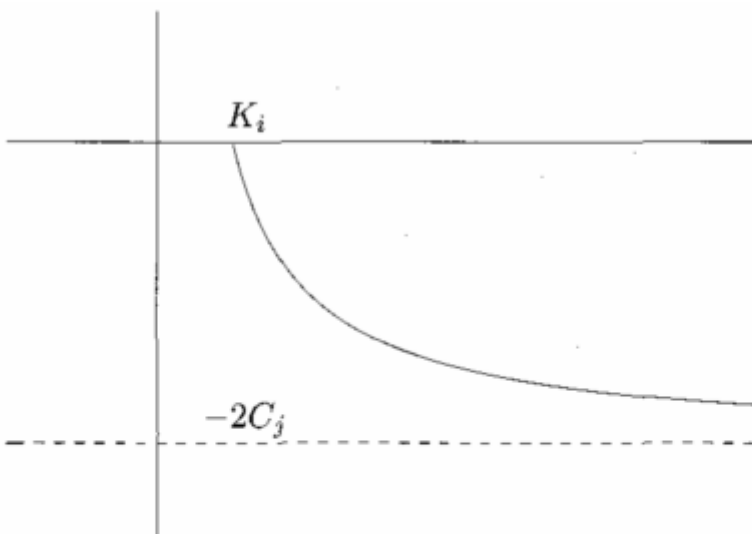
$$Damping(x) = -C_j \frac{|x - K_i| - (x - K_i)}{1 - (x - K_i)}$$

Функции для Repair и Damping представлены ниже.



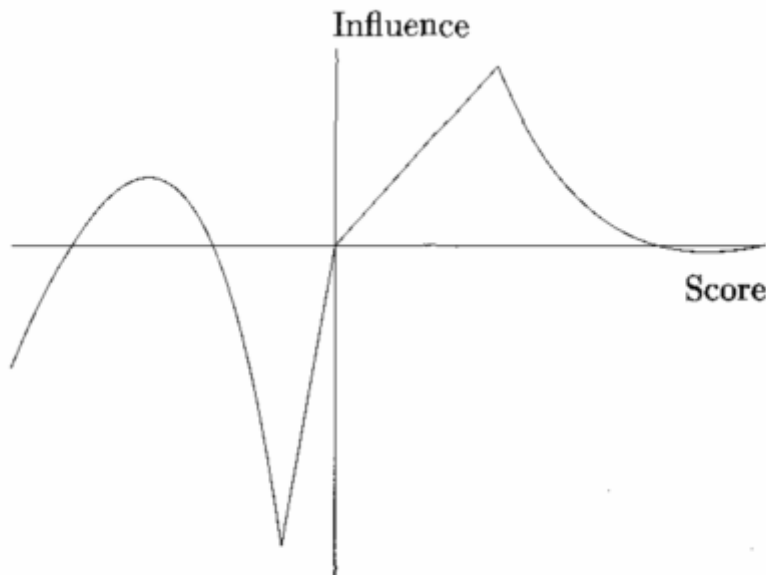


**Figure 13.1:** Graph of repair switch. After a specific negative threshold, the switch is turned on, serving as needed positivity to keep the reaction from becoming too miserable. Here  $2C_j$  is the maximum repair possible.



**Figure 13.4:** Graph of damping switch. After a specific positive threshold, the switch is turned on, serving as needed negativity to keep the interaction from becoming too euphoric.  $K_i$  is the positive threshold above which damping starts.  $-2C_j$  is the maximum damping possible.

Таким образом, получаем Bilinear influence function with repair and damping



**Figure 13.8:** The bilinear influence function with repair and damping. On the right, damping causes the influence function to drop to a more negative value. On the left, repair causes the influence function to rise to a more positive value.

Теперь задача стоит в оценивании параметров отвечающих за repair and dumping. Для этого авторы рассматривают две альтернативы:

- 1) Можно постепенно подобрать модель к данным варьируя параметры таким образом, чтобы модель была наиболее точной
- 2) Можно напрямую определить феномены repair and dumping из данных и оценить параметры

Ниже приведены результаты, отражающие эти два подхода и характеризующие модель (linear model with repair and dumping).

В общем, альтернатива 2 оказалась более успешной определении трех групп браков. Также многие существенные параметры были получены от независимых параметров, схожих с параметрами в простой линейной модели (linear model). Так в чем же смысл применения модели с repair and dumping? Авторы отвечают, что в нахождении феноменов repair and dumping как таковых. Кроме того полученная модель представляет возможным исправления ошибок, полученных авторами в предсказании разводов на основе моделей без учета этих феноменов. Так что результаты имеют содержательную основу.

**Table 13.2:** Divorce Prediction Using Parameters of Alternative 2: Fitting the Bilinear Model with Repair and Damping to the Influence Plots for Each Spouse.

Variable	F-ratio	df	Means	
			Stable	Divorced
<b>Number of Influenced Steady States</b>				
where (W+) and (H-)	0.00	1,129	0.12	0.12
where (W-) and (H-)	7.55**	1,129	0.54	1.24
where (W+) and (H+)	7.44**	1,129	0.95	0.24
where (W-) and (H+)	1.37	1,129	0.16	0.00
<b>Wife</b>				
Inertia	0.18	1,129	0.39	0.42
Initial state	22.14***	1,129	0.28	-1.13
Uninfluenced steady state	15.01***	1,129	0.50	-2.26
<b>Influence on husband</b>				
Positive half slope	0.00	1,124	0.53	0.52
Negative half slope	1.13	1,127	0.52	0.62
Threshold, husb damping	0.53	1,124	5.64	5.02
Strength, husb damping	2.95 <sup>a</sup>	1,124	-4.63	-3.14
Threshold, husb repair	0.16	1,127	-4.74	-4.40
Strength, husb repair	0.01	1,127	3.90	3.83
<b>Husband</b>				
Inertia	3.09 <sup>a</sup>	1,129	0.40	0.30
Initial state	23.34***	1,129	0.45	-1.11
Uninfluenced steady state	18.70***	1,129	0.70	-1.89
<b>Influence on wife</b>				
Positive half slope	0.00	1,126	0.50	0.50
Negative half slope	0.65	1,124	0.58	0.46
Threshold, wife damping	0.04	1,126	5.75	5.58
Strength, wife damping	8.04**	1,126	-4.30	-2.07
Threshold, wife repair	0.11	1,120	-4.68	-4.95
Strength, wife repair	0.06	1,120	3.43	3.58

<sup>a</sup>  $p < .10$ , \*  $p < .05$ , \*\*  $p < .01$ , \*\*\*  $p < .001$ .  
(W+) Wife Positive, (W-) Wife Negative.  
(H+) Husband Positive, (H-) Husband Negative.

**Table 13.3:** Divorce Prediction Using Parameters of Alternative 1: Estimated from the Best Fit to Observed Cumulative Scores.

Variable	F-ratio	df	Means	
			Stable	Divorced
<b>Wife</b>				
Threshold, husb damping	0.03	1,129	0.40	0.35
Strength, husb damping	0.00	1,129	3.52	3.53
Threshold, husb repair	1.26	1,129	-1.88	-1.35
Strength, husb repair	0.14	1,129	3.84	3.53
<b>Husband</b>				
Threshold, wife damping	0.05	1,129	0.42	0.47
Strength, wife damping	0.27	1,129	3.22	3.65
Threshold, wife repair	0.43	1,129	-1.72	-1.41
Strength, wife repair	0.07	1,129	3.55	3.76

<sup>a</sup>  $p < .10$ , \*  $p < .05$ , \*\*  $p < .01$ , \*\*\*  $p < .001$ .

**Table 13.4:** Three Criterion Groups and Parameters of Alternative 2: Fitting the Bilinear Model with Repair and Damping to the Influence Plots for Each Spouse.

Variable	F-ratio	df	Means		
			Happy, Stable	Unhappy, Stable	Div.
<b>Number of Influenced Steady States</b>					
where (W+) and (H-)	0.05	2,55	0.15	0.15	0.12
where (W-) and (H-)	4.78*	2,55	0.20	0.95	1.24
where (W+) and (H+)	6.27**	2,55	1.20	0.55	0.24
where (W-) and (H+)	0.42	2,55	0.01	0.01	0.00
<b>Wife</b>					
Inertia	0.32	2,55	0.37	0.41	0.42
Initial state	11.51***	2,55	0.64	-0.02	-1.13
Uninfluenced steady state	13.21***	2,55	1.17	-0.26	-2.26
Influence on husband					
Positive half slope	0.41	2,51	0.46	0.55	0.52
Negative half slope	0.39	2,54	0.51	0.65	0.62
Threshold, husb damping	1.30	2,51	5.15	6.82	5.02
Strength, husb damping	2.36	2,51	-3.41	-4.87	-3.14
Threshold, husb repair	2.79 <sup>a</sup>	2,54	-6.27	-3.87	-4.40
Strength, husb repair	0.55	2,54	4.20	3.44	3.83
<b>Husband</b>					
Inertia	0.59	2,55	0.37	0.35	0.30
Initial state	9.77***	2,55	0.74	-0.04	-1.11
Uninfluenced steady state	10.34***	2,55	1.03	-0.47	-1.89
Influence on wife					
Positive half slope	1.00	2,54	0.51	0.39	0.50
Negative half slope	0.71	2,53	0.68	0.48	0.46
Threshold, wife damping	0.12	2,54	5.27	5.75	5.58
Strength, wife damping	3.05 <sup>a</sup>	2,54	-3.98	-3.61	-2.07
Threshold, wife repair	0.02	2,50	-5.16	-5.03	-4.95
Strength, wife repair	0.51	2,50	3.34	2.94	3.58

<sup>a</sup>  $p < .10$ , \*  $p < .05$ , \*\*  $p < .01$ , \*\*\*  $p < .001$ .  
(W+) Wife Positive, (W-) Wife Negative.  
(H+) Husband Positive, (H-) Husband Negative.

**Table 13.5:** Three Criterion Groups and Parameters of Alternative 1: Estimated from the Best Fit to Observed Cumulative Scores.

Variable	F-ratio	df	Means		
			Happy Stable	Unhappy Stable	Divorced
<b>Wife</b>					
Threshold, husb damping	1.22	2,55	0.40	0.90	0.35
Strength, husb damping	1.88	2,55	2.50	4.40	3.53
Threshold, husb repair	0.70	2,55	-1.95	-1.45	-1.35
Strength, husb repair	0.60	2,55	3.15	4.20	3.53
<b>Husband</b>					
Threshold, wife damping	0.10	2,55	0.45	0.60	0.47
Strength, wife damping	2.01	2,55	2.10	4.00	3.65
Threshold, wife repair	2.83 <sup>a</sup>	2,55	-2.20	-0.95	-1.41
Strength, wife repair	0.52	2,55	3.25	4.30	3.76

<sup>a</sup>  $p < .10$ , \*  $p < .05$ , \*\*  $p < .01$ , \*\*\*  $p < .001$ .

### **Использование различной информации для моделирования отношений.**

Авторы в своих исследованиях помимо поведенческих данных использовали физиологические данные (в основном частоту сердцебиения) и восприятие супругами их поведения в процессе эксперимента (обсуждения проблем). Измерение восприятия супругами своего поведения происходило следующим образом: после эксперимента супругам по отдельности показывали запись их разговора. В процессе просмотра видео они с помощью специальных регуляторов (рукоятка аналогичная регуляторам громкости на колонках) могли анализировать свое аффективное поведения (система та же, что и с поведением, то есть, амплитуда регулятора ранжировалась от -4 до 4 за 1 секунду).

Результатом являлось то, что все три способа измерения давали коррелирующие результаты, но наибольшую точность достигали именно поведенческие методы. Таким образом, система кодирования на основе аффективного поведения является, по всей видимости, наилучшей. Интересен тот факт, что для данных, основанных на восприятии своего поведения, моделирование давало неточные результаты, что говорит об искажении восприятия супругов своего поведения в супружеских отношениях.